Alcuni Commenti sui Contributi del Levi-Civita in Meccanica dei Continui

Giuseppe Saccomandi[1,2]

[1] *Dipartimento di Ingeneria, Università di Perugia, Italy*
[2] *School of Applied Mathematics, NUI Galway, Ireland*

8 gennaio 2018

1 Introduzione

Tutti conoscono l'aneddoto su cosa piacesse di più ad Albert Einstein dell'Italia: *gli spaghetti e Levi-Civita*. Questo aneddoto mi suggerisce una *facile* caricatura del Fisico-Matematico italiano. Infatti, se è vero che la caricatura più comune dell'italiano lo vede seduto di fronte ad un piatto di spaghetti, allora quella del *Fisico-Matematico* italiano lo dovrebbe vedere davanti alle *Lezioni* del Levi-Civita. Direi molto di più: sono le *Lezioni* a definire la Fisica-Matematica Italiana.

Figura 1: *Italiani e spaghetti*

La prefazione alla parte prima del volume secondo delle *Lezioni* assicura che la *Meccanica dei sistemi continui* avrebbe dovuto completare questo volume. Alla fine fu necessario rimandare questo argomento ad un'ipotetico terzo volume che, Amaldi ricorda in nota, non fu mai redatto. Questo stato delle cose ha forse creato un certo vuoto nel ricordare e valorizzare il contributo di Levi-Civita alla meccanica dei sistemi continui e qui vorrei dare un piccolo contributo a riempire questo vuoto.

A dire il vero, negli ultimi anni, un gruppo di storici della Matematica ha analizzato sistematicamente la produzione scientifica di Levi-Civita (vedi per esempio Nastasi e Tazzioli, 2005) e la loro meritoria azione si è molto dilungata sui contributi del Nostro in idrodinamica (Nastasi e Tazzioli, 2006; Tazzioli 2016). Avverto da subito che non posso competere con la professionalità di questi storici e anzi mi scuso per il mio approccio ingenuo. Nonostante tutto, spero di poter umilmente aggiungere qualcosa di interessante allo stato complessivo della questione.

Figura 2: *Caricatura del Prof. Senatore Enrico Catellani: dalla raccolta di ritratti di docenti padovani, realizzati dal pittore Sinòpico. Immaginate un professore di Meccanica Razionale che mentre* inciampa *nei libri di Cercignani e Galavotti si aggrappa alle Lezioni.*

La discussione è organizzata partendo dallo studio del paradosso di d'Alembert che Levi-Civita e alcuni suoi collaboratori hanno portato avanti all'inizio del novecento. A questa analisi sono rivolti il secondo ed il terzo paragrafo. Nel quarto paragrafo, passo ad analizzare brevemente il problema dei filetti vorticosi e delle onde. Infine, nel quinto paragrafo mi interesso meccanica dei solidi.

2 Il paradosso di d'Alembert

Una leggenda abbastanza comune riguarda la risoluzione del paradosso di d'Alembert da parte di Levi-Civita per mezzo della *ipotesi della scia*.

Il paradosso in questione viene presentato da Umberto Cisotti[1] nel 1927 come segue:

> Un corpo di forma sferica, immerso in una massa fluida, indefinitamente estesa in tutti i sensi, trasla uniformemente. Il moto indotto nel fluido, supposto incompressibile, e ovunque continuo e regolare, permanente rispetto al solido e irrotazionale, è analiticamente caratterizzato da una soluzione classica. Mette questa in evidenza che in coppie di punti, della superficie sferica, estremi di uno stesso diametro, le pressioni dinamiche hanno lo stesso valore; d'altra parte esse, normali agli elementi superficiali a cui si riferiscono – e ciò per la natura perfetta del fluido – sono tutte allineate verso il centro della sfera: perciò dette pressioni, a due a due opposte e allineate, costituiscono un sistema equilibrato, cioè sono nulli la loro somma e il loro momento. Ciò significa, in particolare, che il solido sferico non incontra alcuna resistenza al suo movimento da parte del liquido che lo circonda.

Ho scelto questa descrizione perché la trovo molto alla *meccanica razionale* ma per una formulazione rigorosa e moderna di questo paradosso si può invece vedere (Marchioro e Pulvirenti, 2012).

Come è ben noto nel caso di flussi potenziali stazionari e piani le equazioni di Eulero dei fluidi perfetti incomprimibili si riducono all'equazione di Laplace. Una volta risolta questa equazione e le condizioni al contorno di interesse risulta completamente determinato il flusso. Il campo di pressione si calcola invece usando l'equazione di Bernouilli.

L'osservazione sperimentale, si veda la Figura (3), mette in evidenza in modo chiaro che la descrizione per mezzo della idealizzazione di flusso potenziale del fenomeno in questione è alquanto insoddisfacente.Nella realtà si osservano fenomeni di distacco e scie a valle dei corpi che si muovono nel fluido che non sono compatibili con la descrizione del Cisotti.

[1] Voghera, 26 febbraio 1882 – Milano, 6 luglio 1946

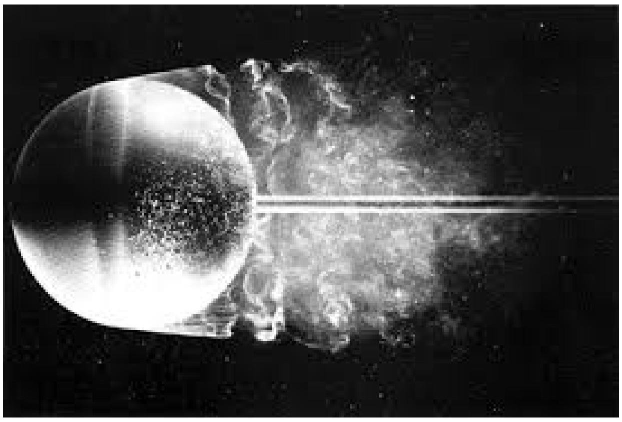


Figura 3: *Flusso attorno ad una sfera*

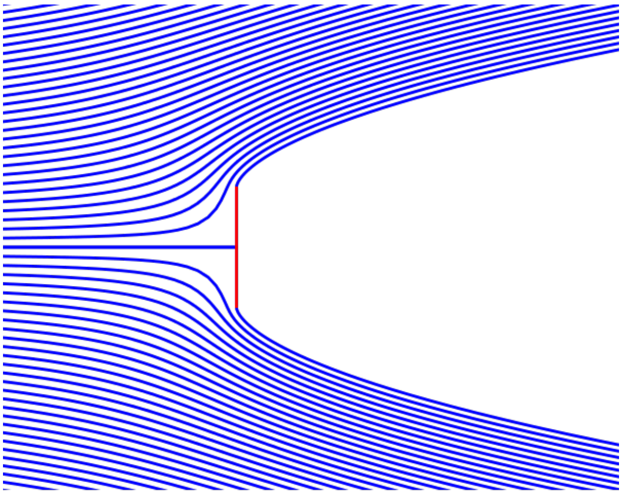


Figura 4: *Flusso incomprimibile potenziale e stazionario attorno una piastra in due dimensioni*

Per superare il paradosso di d'Alembert, Hermann von Helmholtz[2] prima e quindi Gustav Kirchhoff[3] e John William Strutt[4], barone Rayleigh, proposero di studiare soluzioni *discontinue* dell'equazione dell'idrodinamica dei fluidi perfetti. Queste soluzioni prevedono la formazione di una *scia*.

Si osserva facilmente che ogni qual volta un corpo solido si muove attraverso un fluido, il suo passaggio trascina il fluido in modo che, dietro al corpo, il fluido si muove nella stessa direzione del suo moto formando per l'appunto una scia. Questa può essere idealizzata da una *vortex sheet* ovvero una superficie dove la velocità tangenziale è discontinua mentre la velocità normale rimane continua.

Helmholtz propone la sua soluzione per una piastra sottile ortogonale alla direzione del flusso (ovviamente in un dominio illimitato) e i dettagli di questa soluzione si possono trovare nel libro di Batchelor (2000, pagina 499). L'idea di base è che in questo modo si innesca una differenza di pressione tra monte e valle della lamina. Una differenza di pressione proporzionale alla forza esercitata sul corpo stesso che permette di risolvere il paradosso di d'Alembert.

Levi-Civita scrive due note fondamentali collegate a questo argomento: una nota Lincea del 1901 ed una memoria molto più corposa appara su Rendiconti di Palermo del 1907. In realtà Levi-Civita è interessato al problema della *resistenza* che ovviamente è uguale e contraria alla componente lungo la direzione di traslazione del corpo solido della forza di drag. Infatti in (Levi-Civita, 1907) si legge:

> Le esperienze antiche e moderne si accordano infatti nella constatazione che la resistenza varia sensibilmente in ragione del quadrato della velocità. Ora, se la parte preponderante della resistenza diretta provenisse dalla viscosità del liquido, la resistenza stessa dovrebbe risultare (almeno in via approssimativa) proporzionale alla velocità; se provenisse dall'attrito fra liquido e solido, dovrebbe, per piccole velocità (pochi metri al secondo) essere quasi indipendente dalla velocità.

Quindi, per questo motivo Levi-Civita vuole spiegare il paradosso di d'Alembert nell'ambito di quello che lui indica come *l'idrodinamica razionale*. Il Maestro non ignora che molti cercano nella teoria dei fluidi viscosi la soluzione di questo paradosso e non ignora i problemi che l'idea della scia comporta nel descrivere la realtà sperimentale:

> La natura della discontinuità è però più complessa di quella postulata dalla teoria. La regione B infatti non risulta in realtà occupata da fluido solidale col corpo C, nè tanto meno si estende indefinitamente. In essa intervengono (le fotografie delle citate esperienze lo lasciano scorgere in modo manifesto) movimenti vorticosi e turbolenti, che vanno gradatamente attenuandosi (per viscosità, ed altre eventuali azioni dissipatrici) quanto più ci si allontana dal corpo C, cosicché, ad una certa distanza, lo stato di moto del fluido non presenta più traccia di discontinuità, anzi cessa addirittura ogni sensibile influenza del moto del solido, le particelle apparendo immobili.

Il lavoro di Levi-Civita del 1907 colpisce per il rigore matematico, la maestria nel calcolo e la profondità della discussione meccanica. Infatti bisogna ricordare che contiene:

- l'integrale generale dei moti potenziali in presenza di scia;
- il calcolo della resistenza e la dimostrazione generale che la resistenza dipende dal quadrato della velocità.

[2] Potsdam, 31 agosto 1821– Berlino- Charlottenburg, 8 settembre 1894.
[3] Königsberg, 12 marzo 1824– Berlino, 17 ottobre 1887.
[4] Langford Grove, 12 novembre 1842 –Witham, 30 giugno 1919

Per capire i dettagli del problema e apprezzare il risultato del 1907 bisogna però tornare indietro alla nota Lincea del 1901.

La motivazione principale della nota Lincea è chiara dall'incipit

> A me pare che la legge di Newton (resistenza proporzionale al quadrato della velocità v), relativa ai fluidi incompressibili, si possa ricavare teoricamente, senza uscire della idrodinamica pura.

Questo risultato viene ottenuto considerando un corpo S, si veda figura (5), che trasla con velocità uniforme v e siccome

> Come è ben noto, l'ipotesi di un movimento *continuo in tutto lo spazio esterno ad S* conduce a conseguenze affatto inattendibili circa la resistenza del fluido.

ecco che si devono modificar le ipotesi classiche. Ovvero, considerare che:

- Il movimento del fluido ideale e con densità constante, prodotto dal corpo S presenta una *scia* ovvero una superficie di discontinuità infinita δ che si distacca da un contorno σ del corpo stesso;
- la massa fluida nella regione B è rigidamente connessa a S;
- il moto del fluido nella regione A è irrotazionale con le usuali condizioni alla infinito.

Questo significa che, indicato con $v\varphi$ il potenziale[5] associato con il moto del fluido in A, deve essere

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0, \tag{1}$$

mentre sul contorno $\sigma_1 \cup \delta$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \gamma, \tag{2}$$

dove σ_1 è la frontiera di S immersa nella regione A e γ è il coseno che la normale esterna forma con l'asse delle z in un punto generico del contorno di interesse.

In un punto generico di δ si ha $p_A = p_B$ e quindi, usando un sistema di riferimento solidale con il corpo che, come già detto, trasla uniformemente con velocità v lungo z, e usando il teorema di Bernoulli si ottiene

$$\frac{p_A}{\rho} = c - \frac{v^2}{2}\left[\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2\right] + v^2\varphi_z.$$

La costante c si determina in quanto asintoticamente le derivate di φ si annullano, all'infinito tutto è fermo, quindi $c = p_A^\infty/\rho$ e calcolando questa quantità sopra un punto di δ si ottiene $C = p_B/\rho$ ovvero

$$p_A = p_B - \rho\frac{v^2}{2}\left[\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2\right] + \rho v^2\varphi_z.$$

[5] La notazione è quella del Levi-Civita che usa una adimensionalizzazione particolare.

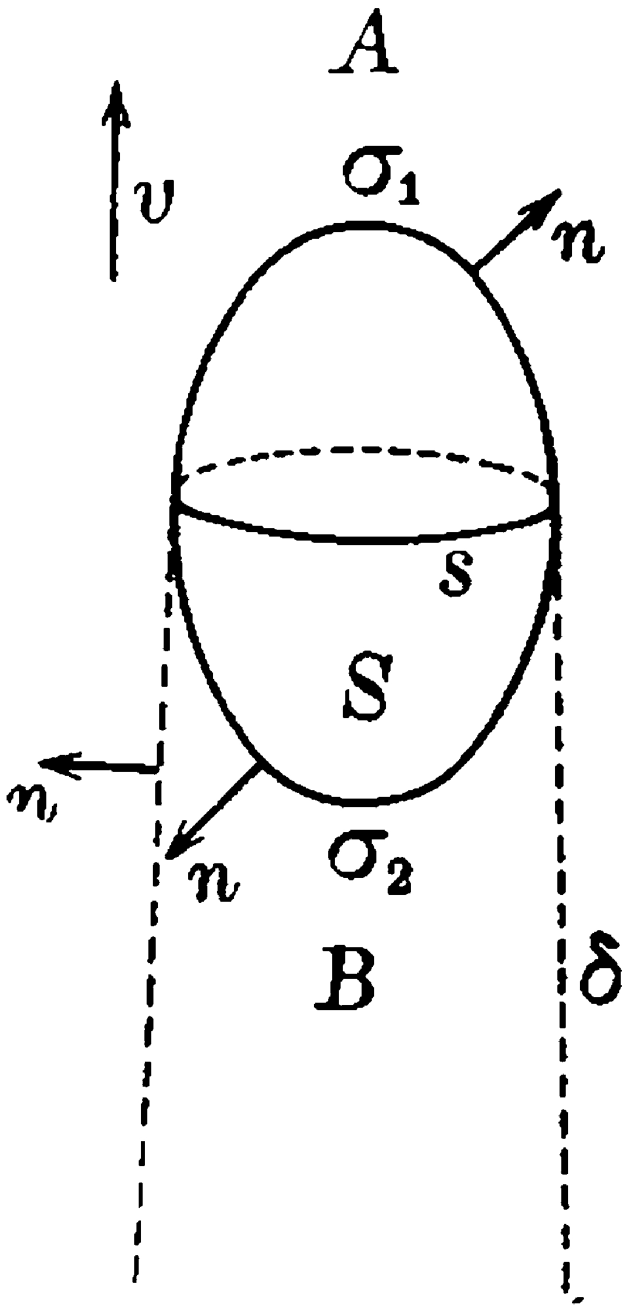


Figura 5: *Il disegno originale da (Levi-Civita, 1901).*

Valutando l'equazione di Bernouilli sopra δ si ottiene l'equazione

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 - 2\varphi_z = 0, \tag{3}$$

che permette di determinare la superficie libera stessa.

Quindi il problema è risolto se si ottiene una soluzione del sistema dato dalle relazioni (1), (2) e (3) che permettono di determinare le incognite φ e δ.

Levi-Civita osserva

> Dal punto di vista del rigore matematico inceppiamo qui in una questione di esistenza, che cogli attuali mezzi analitici non si saprebbe discutere.

Detto questo il Levi-Civita passa a calcolare la forza di drag nella direzione di avanzamento del corpo ovvero in definitiva

$$R = \int_\sigma p\gamma d\sigma = \int_{\sigma_1} p_A \gamma d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} p_B \gamma d\sigma_2.$$

La R può essere riscritta tenendo conto che $\sigma_1 \cup \sigma_2$ è una superficie chiusa ed essendo p_B costante

$$\int_{\sigma_2} p_B \gamma d\sigma_2 = -\int_{\sigma_1} p_B \gamma d\sigma_1,$$

quindi

$$\begin{aligned} R &= \int_{\sigma_1} (p_A - p_B)\gamma d\sigma_1 \\ &\equiv \frac{\rho}{2} v^2 \int_{\sigma_1} \left(2\varphi_z - \left[\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2\right]\gamma\right). \end{aligned}$$

In questo modo Levi-Civita non solo dimostra quanto prefissato nell'incipit della nota, ma supera il paradosso di d'Alembert.

In ogni caso è lo stesso Levi-Civita ad avvertirci che questo risultato era già stato ottenuto da Lord Rayleigh nel caso di una lamina infinitamente lunga ad orli paralleli ed è per questo che non è possibile indicare il Maestro come *risolutore* del paradosso in questione.

La nota chiude con lo stesso calcolo per un fluido elastico che segue la legge di Boyle $p = c\rho$ con c costante. In questo modo supponendo piccolo il rapporto $\lambda = v^2/c$ si ritrova la correzione

$$R = \rho_B v^2 \left(a_0 + a_1 \frac{v^2}{c} + \dots\right),$$

dove i coefficienti a_0 e a_1 dipendono solo dalla forma di S.

Il lavoro del 1907 di fatto risolve in maniera rigorosa e generale il problema che abbiamo descritto con un metodo basato sulla teoria delle funzioni di variabile complessa per mezzo di una trasformazione conforme e di una trasformazione di tipo odografo. In questo modo si risolve il problema di esistenza del problema a frontiera libera appena illustrato.

3 La diffusione dei lavori del Levi-Civita sul paradosso

Vorrei qui fare dei complementi all'interessante ricerca (Tazzioli, 2017) su come il lavoro del 1907 si sia ramificato e diffuso in Italia e non solo. La maggiore differenza tra quello che discuto di seguito e (Tazzioli, 2017) è nel mio interesse per l'attenzione della comunità dei nostri meccanici razionali.

Nel 1946 Carlo Somigliana[6] afferma che

> Classiche sono le ricerche del LEVI-CIVITA. nel campo dell' idrodinamica teorica, relativa ai moti piani, specialmente i moti con scia, che danno una spiegazione del paradosso di D'ALEMBERT, e possono servire ad una rappresentazione intuitiva del moto delle navi, e del moto dei liquidi che incontrano ostacoli. La teoria è fondata sull'uso sistematico delle funzioni di variabile complessa e sulla rappresentazione conforme, ed aprì la via ad una serie numerosa di ricerche dei matematici italiani fra cui notevolissime quelle del nostro presidente prof. CISOTTI.

Certamente sarà Cisotti, allievo diretto del Levi-Civita, quello maggiormente impegnato a propagandare il punto di vista del Maestro. Luigi Amerio[7] in una conferenza del 2000 ricorda

> Ricordo ancora (da studente) le bellissime lezioni sul problema della scia, dai primi risultati di Helmholtz e Kirchhoff alla soluzione generale proposta da Levi-Civita nella celebre memoria del 1906**Amerio sbaglia la data.**

Cisotti userà in modo sistematico i risultati del 1907. Grazie a questo metodo non solo continuerà ad indagare il paradosso di d'Alembert ma anche le vene fluide e la teoria dei getti fluidi. Nel suo lavoro del 1927, da dove ho preso la descrizione del paradosso riportato nella precedente paragrafo, Cisotti illustra che almeno tre sono le vie lunghe le quali gli *idromeccanici* hanno cercato di indagare le cause dello stesso:

- ipotesi della scia semplice;
- ipotesi della scia con vortici;
- ipotesi del sottile strato viscoso e vorticoso aderente alla parete del solido.

Mentre Cisotti ricorda che, ai tempi, l'ultima via è battuta solo da Ludwig Prandtl[8] e la penultima da Theodore von Kármán[9], per la prima ci snocciola una lunga lista di eminenti scienziati:

[6] Milano, 20 settembre 1860 – Valmorea, 19 giugno 1955

[7] Padova, 15 agosto 1912 – Milano, 28 settembre 2004. Ricordo che Amerio si laureò in ingegneria elettrotecnica al Politecnico di Milano nel 1936.

[8] Frisinga, 4 febbraio 1875 – Gottinga, 15 agosto 1953

[9] Budapest, 11 maggio 1881 – Aquisgrana, 6 maggio 1963

> HELMHOLTZ, KIRCHHOFF, RÉTHY, BOBILEFF, JOUKOWSKI, MICHELL, LOVE, GREENHILL, LEVI-CIVITA

Sembra quindi che la via considerata dal Levi-Civita sia stata il *mainstream* dell'epoca e la prima curiosità che sorge spontanea riguarda il capire cosa Prandtl e von Kàrman pensassero del lavoro del 1907.

Nel 1922 a Innsbruck avviene una riunione, definita informale, di idromeccanica i cui proceedings verrano pubblicati a cura del Levi-Civita e von Kàrman. Questi proceedings contengono un articolo di Cisotti intitolato

> Über den Anteil Italiens an dem Fortschritt der klassischen Hydrodynamik in den letzten fünfzehn Jahren.

Questa memoria è un'interessante rassegna della produzione scientifica italiana dove ampio spazio viene dato al Levi-Civita e all'articolo del 1907. Quindi sicuramente Prandtl e von Kàrman hanno avuto modo di conoscere sia la nota Lincea che il lavoro sui Rendiconti di Palermo. Possiamo però dire di più a riguardo in quanto nello stesso volume Levi-Civita contribuisce con una memoria sulle onde e in appendice di questa memoria, come spesso avveniva nei rendiconti dell'epoca, è riportata la discussione dell'assemblea alla relativa conferenza del Maestro. Gli interventi riportati sono di Prandtl e di von Kàrman. Dalle poche righe si nota un atteggiamento velatamente critico da parte di Prandtl e di grande stima da parte di von Kàrman.

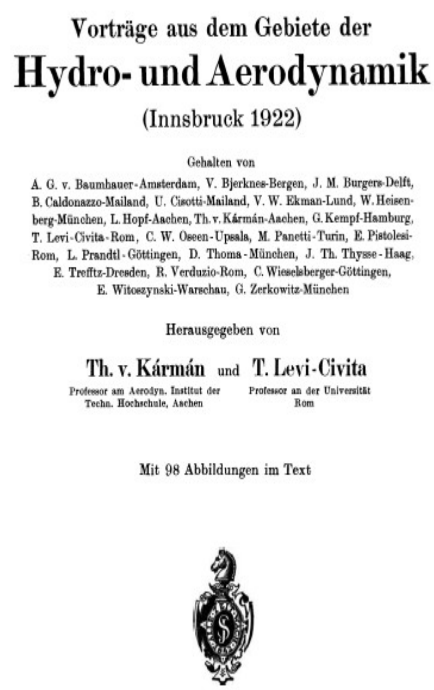
Che von Karman avesse grandissima stima del nostro e del suo lavoro del 1907 si può anche desumere da un lavoro che il grande meccanico ungherese pubblica nel 1949 sugli Annali di Matematica Pura ed Applicata dove si legge

> The theory of the stationary flow of an incompressible fluid with wake formation has been treated in great details in the scientific literature. Especially the great Italian master of mathematical hydrodynamics, LEVI-CIVITA, gave quite a general method to compute two dimensional flows having partly free boundaries.

Purtroppo Prandtl non è mai stato molto *open minded* per quanto riguarda la letteratura scientifica. Nel 1979 vioene reso pubblico un report per il National Advisory Committee for Aeronautics a firma di Prandtl su argomenti di idrodinamica ideale. Alla fine di questo report la bibliografia viene indicata come una lista della *most important literature* sull'argomento ed è scandalosa: contiene solo riferimenti al gruppo di Gottinga e a quattro classici antichi.

Grazie ai lavori di Tazzioli sappiamo bene che le idee del Levi-Civita vengono sviluppate in dettaglio, soprattutto in Francia, da Marcel Brillouin[10] e Henri Villat[11], ma ad un certo momento è la via di Prandtl che diventa *mainstream*. Uno degli argomenti più convicenti che fa pesare l'ago della bilancio verso l'idea dello strato limite è un'instabilità che viene indicata come il paradosso di Brilloiun e Villat (Lagrée, 2017).

La referenza di base sul paradosso di d'Alembert uscita nel dopoguerra è il SIAM Review di Stewartson del 1981 e in questo lavoro di rassegna la via della scia è completamente dimenticata. Nel libro di Schlichting (1955) , la bibbia dello strato limite, nel primo capitolo si parla di soluzioni di Kirchhoff-Helmholtz e di condizione di Brillouin-Villat a riguardo del flusso ideale attorno ad un cilindro, ma non vi è nessun riferimento


Vorträge aus dem Gebiete der

Hydro- und Aerodynamik

(Innsbruck 1922)

Gehalten von

A. G. v. Baumhauer-Amsterdam, V. Bjerknes-Bergen, J. M. Burgers-Delft, B. Caldonazzo-Mailand, U. Cisotti-Mailand, V. W. Ekman-Lund, W. Heisenberg-München, L. Hopf-Aachen, Th. v. Kármán-Aachen, G. Kempf-Hamburg, T. Levi-Civita-Rom, C. W. Oseen-Upsala, M. Panetti-Turin, E. Pistolesi-Rom, L. Prandtl-Göttingen, D. Thoma-München, J. Th. Thysse-Haag, E. Trefftz-Dresden, R. Verduzio-Rom, C. Wieselsberger-Göttingen, E. Witoszynski-Warschau, G. Zerkowitz-München

Herausgegeben von

Th. v. Kármán und T. Levi-Civita

Professor am Aerodyn. Institut der Techn. Hochschule, Aachen — Professor an der Universität Rom

Mit 98 Abbildungen im Text

Figura 6: *Il frontespizio dei proceedings di Innsbruck 1922*

Figura 7: *La medaglia Villat*

[10]Melle, 19 dicembre 1854 – Parigi, 16 giugno 1948

[11]Parigi, 24 Dicembre 1879 – 19 marzo1972

a Levi-Civita.

Non bisogna però pensare che il paradosso sia completamente risolto. Nel 2010 Hoffman and Johnson sul *Journal of mathematical fluid mechanics* hanno proposto una nuova (definitiva secondo loro) soluzione del paradosso basata sui fatti che:

> (i) potential flow cannot be observed because it is illposed or unstable to perturbations, (ii) computed viscosity solutions of the Euler equations with slip boundary conditions initiated as potential flow, develop into turbulent solutions which are wellposed with respect to drag/lift and which show substantial drag/lift, in accordance with observations

Il primo punto è strettamente collegato con il paradosso di Brillouin-Villat e non è la prima volta che questa *quarta* via viene proposta. Garrett Birkhoff[12] aveva già indicato questa direzione nel suo classico libro di idrodinamica. Sembra però che la stroncatura del libro da parte di James Stoker[13] nel 1950 per il Bulletin of the American Mathematical Society (volume 57 del 1951 pagine 497–499) dove si legge

> For readers who are acquainted with hydrodynamics the majority of the cases cited as paradoxes belong either in the category of mistakes long since rectified, or in the category of discrepancies between theory and experiment the reasons for which are also well understood. On the other hand, the uninitiated would be very likely to get wrong ideas about some of the important and useful achievements in hydrodynamics from reading this chapter.

abbia completamente congelato Birkhoff che non continuò a perseverare in questa direzione.

Il lavoro del 1907 ha lasciato comunque il segno nell'ambito della teoria matematica dei problemi fluidodinamici. James Serrin[14] nel 1952 parla della

> brilliant analytical formulation of the Helmholtz problem, due to Levi-Civita and Villat ....

e ancora nei lavori di Robert Finn e della sua scuola si possono ritrovare continui riferimenti a Levi-Civita. Questa è una misura significativa del successo ottenuto dalla nota del 1907. Basti pensare che per Serrin o Finn una dimostrazione rigorosa non può fare a meno di una dichiarazione esplicita dello spazio funzionale dove la soluzione viene cercata. Di fatto le note di questi grandi matematici non fanno altro che complementare con queste considerazioni i calcoli di Levi-Civita.

[12] Princeton, 19 gennaio 1911 –Water Mill, 22 dicembre 1996
[13] Pittsburgh, 2 marzo 1905– New York, 19 ottobre 1992
[14] Chicago, 1 novembre 1926– Minneapolis, 23 agosto 2012.

Vorrei anche evidenziare di una notevole dimenticanza: quella di Bruno Finzi[15]. Finzi nel 1933 scrive una lunga nota sulla teoria del volo dove parla del paradosso di d'Alembert ma si riferisce principalmente al Cisotti e alla monografia di Enrico Pistolesi[16] senza mai nominare Levi-Civita. La cosa peggiora in un altro articolo del 1970 dedicato specificamente a d'Alembert e al suo paradosso dove si nomina una sola volta solo il Cisotti.

Non ho idea delle ragioni di questa dimenticanza che è veramente fastidiosa in quanto Finzi riprende l'impianto di (Cisotti, 1927) come si vede dal seguente passaggio

> Basta la presenza di singolarità per rimuoverlo, come avviene in presenza di scie di vortici (Kàrman), di superfici di discontinuità per la velocità, come avviene al confine di una scia di fluido morto (Helmohltz), di strati vorticosi (Prandtl).

In ogni caso voglio terminare citando il bellissimo libro di Darrigol (2005) sulla storia della fluidomeccanica

> In summary, at the turn of the century, discontinuity surfaces remained the main analytical approach to the resistance problem for a slightly-viscous fluid. Yet they had well-identified shortcomings, namely: they led to utterly unstable and physically impossible motions, they gave smaller resistances than in reality, and they were essentially indeterminate in the case of smoothly-shaped bodies. For a Kelvin, these defects were fatal. For a Rayleigh, a Föppl, or a Levi-Civita, discontinuity surfaces marked a significant step toward a successful theory of resistance

Credo che questo commento dia un quadro preciso di cosa sia stato fatto e di cosa forse ancora doveva essere migliorato riguardo il paradosso di d'Alembert, ma non bisogna scordare che il metodo di Levi-Civita rimane uno strumento efficace ed efficiente in tutti i problemi a frontiera libera.

4 Ancora fluidi

L'articolo nei proceedings di Innsbruck di Cisotti è molto interessante per valutare l'impegno e lo spessore della scuola di *idromeccanica* (uso il termine caro al Cisotti) italiana che in gran parte ha ovviamente radice in Levi-Civita. Nella bibliografia della memoria sono elencati i seguenti *Meccanici Razionali*

- Emilio Almansi (Firenze, 15 aprile 1869 – Firenze, 10 agosto 1948);

[15] Gardone Val Trompia, 13 febbraio 1899– Milano, 10 settembre 1974
[16] Firenze, 2 dicembre 1889 – Pisa, 29 febbraio 1968

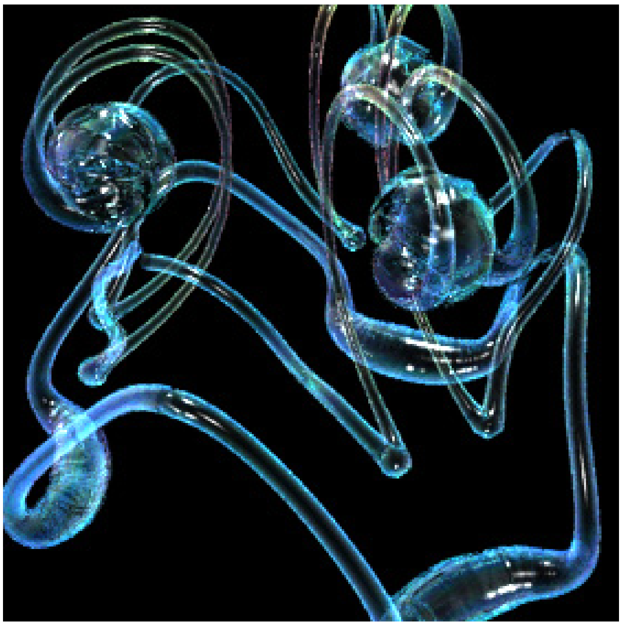


Figura 8: *Screenshot di una simulazione di due filetti vorticosi* leap-frogging *modellati con un flusso potenziale ideale incomprimibile.*

- Tommaso Boggio (Valperga, 22 dicembre 1877 – Torino, 25 maggio 1963);
- Pietro Burgatti (Cento, 27 febbraio 1868 – Bologna, 20 maggio 1938);
- Bruto Caldonazzo (Valdagno, 25 giugno 1886 – Firenze, 27 gennaio 1960);
- Umberto Crudeli (Macerata, 30 maggio 1878 – Ascoli Piceno, 14 settembre 1959);
- Ernesto Laura (Porto Maurizio, 23 marzo 1879 – Padova, 29 dicembre 1949);
- Mario Pascal (Pavia, 31 maggio 1896 – Napoli, 6 novembre 1949) ;
- Attilio Palatini (Treviso, 18 novembre 1889 – Roma, 24 agosto 1949);
- Luigi Sante Da Rios (Santa Lucia di Piave, 2 aprile 1881 – Padova, 1965)
- Antonio Signorini (Arezzo, 2 aprile 1888 – Roma, 23 febbraio 1963);
- Carlo Somigliana (Milano, 20 settembre 1860 – Valmorea, 19 giugno 1955);
- Angelo Tonolo (Casale sul Sile, 5 dicembre 1885 – Padova, 22 giugno 1962)

Ovviamente non tutti in questa lista furono allievi o collaboratori diretti di Levi-Civita ma tutti hanno lavorato nei campi dove i contributi del Maestro furono fondamentali: idromeccanica piana, teoria delle onde e filetti vorticosi.

Voglio partire proprio dai filetti vorticosi, un argomento che è stato illuminato dal punto di vista storico e matematico da Ricca, nel 1996. Ricca riscopre e completa i lavori di da Rios e Levi-Civita sui filetti vorticosi, ma su questi argomenti si può dire molto di più.

In particolare esiste una connessione tra queste equazioni, l'equazioni di tipo Heisenberg spin e l'equazione NLS che vale anche in gasdinamica e magneto-idrodinamica. Questo è possibile per una classe di flussi detti *complex lamellar*. Per questi flussi la vorticità, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, è perpendicolare al campo di velocità

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = 0,$$

Per ottenere la corrispondenza di cui sopra è necessario un risultato del 1927 di Arnaldo Masotti[17] allievo del Cisotti e quindi nipote scientifico di Levi-Civita. Tutto si basa sulla formulazione intrinseca delle equazioni della idrodinamica e gasdinamica. Truesdell nel 1960 propone una derivazione delle equazioni intrinseche della gasdinamica e connette chiaramente il lavoro di Masotti al Levi-Civita. Infatti, per ottenere queste equazioni intrinseche bisogna introdurre la terna intrinseca associata con le linee di flusso $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ ma servono non solo le usuali relazioni di Serret-Frenet (derivata direzionale lungo $\mathbf{t}$) ma anche le derivate direzionali della terna intrinseca lungo $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$. Quindi non basta la curvatura e la torsione ma anche altre quantità che vengono denominate da Masotti usando esattamente la notazione ed il linguaggio introdotto precedentemente dal Levi-Civita nei suoi studi di geometria differenziale.

Questi risultati si possono anche estendere alle equazioni della Magneto-idrodinamica (Mattei, 1965) e in questo caso sono anche state determinate delle applicazioni pratiche (Palumbo, 1968).

Infine, non posso scordare il contributo di Levi-Civita alla teoria delle onde che possiede il suo apice in un monumentale lavoro del 1927. Anche se questo argomento è stato sviscerato in dettaglio da (Darrigol, 2005) mi sembra giusta ricordarne alcuni aspetti.

Il lavoro del 1927 di Levi-Civita mette la parola fine ad una diatriba durata diversi decenni sull'esistenza di onde permanenti di ampiezza finita e non a caso è questo il lavoro più citato del Nostro. Stoker nel suo libro del 1957 afferma

> One of the most outstanding accomplishements in the field of the purely mathematical point of view–the proof of the existence of progressive waves of finite amplitude–was made by Nekrassov in 1921 and independently by a different means by Levi-Civita in 1925.

Inoltre, Stoker si dilunga nei capitoli finali del suo classico libro in una dettagliata esposizione dell teoria di Levi-Civita.

Nel cercare notizie su Aleksandr Ivanovich Nekrasov[18] sono andato a finire sull'articolo di John V. Wehausen[19] e Edmund V. Laitone[20] dal titolo *Surface Waves* pubblicato come capitolo del Handbuch der Physik (1960). Un contributo di una chiarezza espositiva impressionante. Da quanto sono stato capace di ricostruire Nekrasov affronta il problema con una trasformazione che permette di scrivere l'equazione delle onde in

[17] Milano, 18 Novembre 1902 – Milano, 11 Luglio 1989.
[18] Mosca, 9 dicembre 1883–21 maggio 1957.
[19] Duluth, 23 settembre 1913 – 6 ottobre 2005
[20] San Francisco, 6 settembre 1915–El Cerrito, 18 dicembre, 2000.

forma integrale. Questo risultato sembra più collegato ad una nota Lincea del Levi-Civita del 1907 piuttosto che al lavoro del 1925. In ogni caso devo sospendere il mio giudizio in quanto non ho potuto, come già detto, leggere le note originali di Nekrasov, ma essendo di fatto il metodo del 1925 già contenuto nella nota del 1907 è difficile non dare al Maestro la primogenitura del risultato.

Interessante è notare che nella bibliografia dell'articolo nel Handbuch non solo si trova riferimento ai lavori di Levi-Civita ma anche a quelli di Cissotti, Crudeli e Tonolo e di altri meccanici razionali italiani come Edoardo Storchi[21] e Lucia Venturelli, una studentessa, di Masotti.

Nel 1994 Decio Levi, usando il metodo basato sulle funzioni di variabili complesse che Levi-Civita usa nel 1927, determina un'equazione KdV complessa

$$p_\tau + cpp_\xi - \frac{1}{3}\frac{q_0^3}{c^4}p_{\xi\xi\xi} = 0.$$

In questa equazione si ha

$$\xi = x - \left(c - \frac{g}{c^2}q_0\epsilon^{1/3}\right)t + iy \equiv \tilde{x} + i\tilde{y}, \quad \tau = \epsilon t$$

e $p = \tilde{u} - i\tilde{v}$ dove

$$u = c(1 + \epsilon\tilde{u}), \quad v = c\epsilon\tilde{v}.$$

Si noti che la velocità verticale v in questa trattazione non è presa dell'ordine usualmente assunto nelle teorie di acqua bassa. Nel caso che si forza questo ordine l'equazione di Decio Levi diventa un sistema di due equazioni nella stessa incognita

$$\tilde{u}_\tau + \frac{c}{2}\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} - \frac{1}{24}\frac{g}{c^4}\left(\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} - 3\tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}\tilde{y}}\right) = 0,$$
$$\left[\frac{c}{4}\tilde{u} + \frac{1}{24}\frac{g}{c^4}\left(\tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} - 3\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}\right)\right]_{\tilde{y}} = 0,$$

da cui si ritrova la classica equazione di KdV se la velocità orizzontale dipende solo da $\tilde{x}$ e τ.

Questo è solo un esempio per dare un'idea di quanto hanno ancora da suggerire i lavori del 1907 e del 1925 del Maestro.

5 Meccanica dei Solidi

Anche su questo argomento molto è stato detto. Gaetano Fichera[22] nel 1979 osserva

> Ancorché i suoi interessi e le sue principali scoperte appartengano a campi lontani dall'Elasticità, quali la Geometria differenziale, la Teoria di relatività, la Meccanica celeste, l'Idrodinamica, non sono mancati suoi contributi ai problemi dell'Elasticità. Fra essi è da ascrivere una ricerca sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi, che spiega, con l'effetto dovuto alla deformazione dell'ogiva del proietto, l'apparente paradosso secondo cui, aumentando la velocità, può diminuire la penetrazione. Un'altra ricerca che ritengo di dover ricordare riguarda il calcolo del cimento dinamico di un corpo elastico, eseguita, con un metodo già proposto da Beltrami per il caso statico, mediante il calcolo di un confine superiore dell'energia elastica del sistema in moto, da cui segue un criterio di "sicurezza" per il corpo durante il movimento.

[21] 1918–1989
[22] Acireale, 8 febbraio 1922 – Roma, 1° giugno 1996

Figura 9: *Pubblicità cavi Pirelli*

Per quanto riguarda il lavoro di balistica, il Levi-Civita voleva spiegare perché per certi proiettili esiste una velocità critica di impatto alla quale corrisponde la massima penetrazione. Per risolvere questo problema il Maestro ricorre alla teoria dell'elasticità introducendo una nuova formula *empirica* per la deformazione impulsiva subita dal proiettile nell'urto contro il mezzo. Questo lavoro come il trattato di balistica del 1935 scritto assieme ad Amaldi sono stati troppo dimenticati e meriterebbero uno studio più approfondito.

Vorrei terminare discutendo un problema di matematica applicata che però avrebbe un risvolto ancora pienamente centrato nella meccanica dei continui. Nel 1904 in un nota sul Nuovo Cimento Levi-Civita ci racconta

> Il Sig. Ing. E. Jona della Ditta Pirelli e C. mi ha favorito alcuni suoi appunti estremamente interessanti sulla rigidità dielettrica dei cavi per trasporto di energia ad alta tensione, sollecitandomi a sottoporre al calcolo una

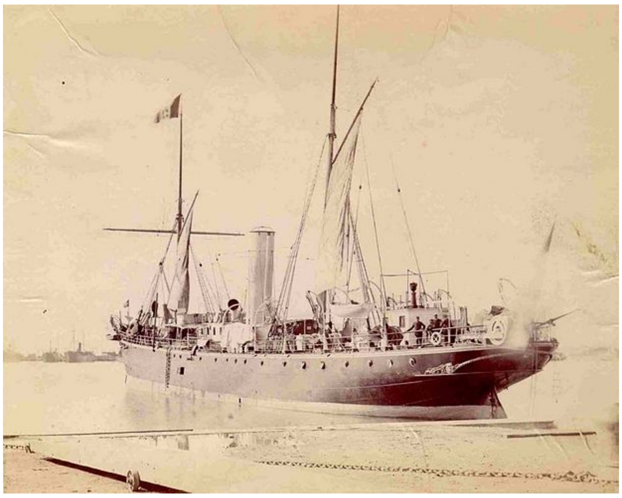


Figura 10: *La Città di Milano fotografata nel 1890*

> questione concreta, il cui studio sperimentale sembra presentare gravi difficoltà e non dà (o almeno non ha dato finora) indicazioni abbastanza sicure da poter servire utilmente da norma costruttiva.

Il Signor Emanuele Jona[23] era un ingegnere denominato il *genio dei cavi* (Giuntini, 2016). Sotto la sua direzione la Pirelli mise in posa decina di migliaia di chilometri di cavi sottomarini. Molti di questi cavi sono stati posati usando il piroscafo posa cavi *Città di Milano* di proprietà della Pirelli e Jona trovò la morte a largo di Filicudi nel naufragio di questo piroscafo dovuto ad uno scoppio delle caldaie nel 1919.

L'ingegner Jona è stato anche autore di studi scientifici sui fondamentali problemi tecnici dell'isolamento elettrico dei cavi. Fu proprio per affrontare queste studi che Jona incontrò il Levi-Civita. L'enciclopedia Treccani alla voce *Emanuele Jona* avverte che per quanto riguardo questi studi

> Il risultato finale, esito di una collaborazione tanto proficua quanto rara nell'Italia del tempo tra un fisico matematico e un ingegnere, fu cruciale e si tradusse nella formulazione teorica e realizzazione di un particolare cavo multistrato denominato "cavo graduato".

Il cavo graduato è ancora oggi la forma impiegata per rendere più uniforme la distribuzione spaziale del gradiente elettrico attraverso lo strato isolante del cavo stesso e minimizzare i rischi di *breakdown* del dielettrico. I risultati ottenuti dalla coppia Jona–Levi-Civita furono presentati anche all'*International Electrical Congress* di Saint Louis del 1904 dove vennero premiati come migliore memoria sull'argomento.

Il problema in questione riguarda la rigidità dielettrica, ovvero il valore limite di campo elettrico oltre il quale si produce una conduzione di elettricità attraverso il materiale dielettrico dei cavi elettrici.

[23]Biella, 1 ottobre 1960– Filicudi, 16 giugno 1919

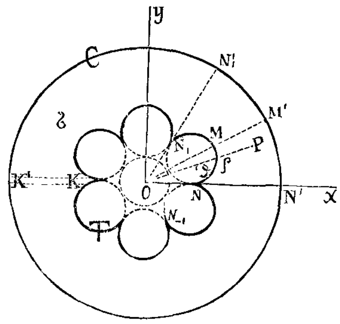


Figura 11: *Figura originale del Levi-Civita*

La schematizzazione del cavo fatta da Levi-Civita è riportata in figura (11) ed è descritta come segue

> Un cavo consta essenzialmente :
>
> di un conduttore centrale (formato da un filo unico a sezione circolare, o più spesso da una corda di tali fili), per cui passe la corrente;
> di un rivestimento isolante;
> di una guaina conduttrice (a sezione circolare) da riguardarsi in comunicazione col suolo.

Nella figura l'isolante è la zona σ con contorno esterno C ed interno T. Il profilo di T può essere circolare nel caso di un filo unico oppure ad archi di cerchi tangenti nel caso di una corda di fili. Si calcola quindi il potenziale (Levi-Civita considera il potenziale logaritmico) W che è ovviamente nullo in C e nei punti di T avrà un valore dipendente dal tempo[24] δ. Il gradiente di ΔW pone a *cimento la rigidità dielettrica* di fatto si assume che dove è il massimo di questo gradiente allora si ha il massimo cimento G. Ovvero

> *G è iI valore massimo del Δ della funzione V, armonica e regolare entro σ, che prende il valore zero su T e uno su C.*

[24]Uso la stessa notazione del Levi-Civita.

Il problema è facilmente risolubile nel caso di un filo circolare infatti in questo caso preso un punto P di σ che in coordinate polari individuiamo con ρ si ha

$$V = \frac{\log \frac{\rho}{r}}{\log \frac{R}{r}} \to \Delta V = \frac{1}{\rho \log \frac{R}{r}},$$

dove R e r sono i raggi esterno ed interno della corona.

Ovviamente la corona non è quasi mai circolare nella realtà e il Levi-Civita trova la soluzione passando nel piano complesso e risolvendo un equazione differenziale del terzo ordine in termini di una funzione ipergeometrica. Trovata la soluzione Levi-Civita si lancia in una discussione dettagliata confrontando i suoi risultati con i valori sperimentali dello Jona. Concludendo che

> per cavi cordati di uno stesso numero di fili (nei limiti delle dimensioni industriali), il cimento diminuisce quando si aumentano le sezioni dei conduttori: sia che si alIontani la guaina esterna o si ingrandisca la corda, prendendo più grossi i fili eIementari, che la costituiscono.

e inoltre

> a parità di sezione (totale ed utile, cioè per dati R ed r') il cimento va sempre aumentando col numero dei fili.

Si nota anche che conviene aumentare gli archi di circonferenza ma ovviamente fino ad un certo punto. Con troppi ventri si arriva ad approssimare nuovamente un cavo unico anche con una corda.

Questo problema potrebbe essere risolto considerando il dielettrico come un corpo elastico per capire meglio anche altri tipi di instabilità possibili.

6 Conclusioni

Lascio a tutti voi le conclusioni di questo racconto. Levi-Civita è un fatto personale: ogni Meccanico Razionale ha diritto di immaginarselo come vuole. Ognuno di noi ha il diritto di sfogliare le Lezioni, soffermarsi sulla pagina che preferisce e sognare di discutere con il Maestro di quello che personalmente si ritiene fondamentale delle nostra disciplina.

Credo solo di poter dire che ristampare il trattato di balistica scritto da Levi-Civita con Amaldi e raccontare per bene la storia dei cavi Pirelli potrebbe essere una buona idea.

Solo per i più curiosi confesso a me piace immaginare Levi-Civita al ritorno da una lezione di Meccanica Razionale ad allievi ingegneri. Lo vedo discutere, con alcuni colleghi, dell'importanza della Meccanica Razionale nei corsi di ingegneria. Lo sento argomentare perché è necessario saper discutere con i docenti delle discipline ingegneristiche facendo sì che la Meccanica Razionale non perda mai il ruolo di disciplina cerniera tra quelle del (vecchio) biennio e del (vecchio) triennio[25]. Infine, lo osservo chiudere il discorso, con la solita calma, affermando perentorio: è per questo che siamo professori di Meccanica Razionale!

Ecco, anche io per il nostro settore scientifico disciplinare avrei lasciato il nome Meccanica Razionale. Ovviamente questa è solo un'opinione.

[25] Ovviamente ai suoi tempi non esistevano biennio e triennio, ma siamo in un sogno.

Riferimenti bibliografici

[1] Amerio, Luigi. "Indirizzi e sviluppi matematici nel Politecnico: Dal 1923 al 1973." Milan Journal of Mathematics 69 (1999): 185–192.

[2] Batchelor, George Keith. An introduction to fluid dynamics. Cambridge university press, 2000.

[3] Betyaev, Stanislav Kupriyanovich. "Hydrodynamics: problems and paradoxes." Physics-Uspekhi 38 (1995): 287-316.

[4] Birkhoff, Garrett. Hydrodynamics. Princeton University Press, 2015.

[5] Cisotti, Umberto. "Sopra un paradosso e un principio in idro-aeromeccanica." Milan Journal of Mathematics 1 (1927): 39–43.

[6] Darrigol, Olivier. Worlds of flow: A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl. Oxford University Press, 2005.

[7] Fichera, Gaetano. "Il contributo italiano alla teoria matematica dell'elasticità." Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 28 (1979): 5–26.

[8] Finzi, Bruno. "Sulla teoria del volo." Milan Journal of Mathematics 7 (1933): 115–131.

[9] Finzi, Bruno. "D'Alembert, il suo paradosso e il suo principio." Milan Journal of Mathematics 40 (1970): 61–80.

[10] Giuntini, A. "Il genio dei cavi. Emanuele Jona, la Pirelli e la telegrafia sottomarina italiana (1886-1919)". STORIA IN LOMBARDIA 1 (2016): 5–24.

[11] Hoffman, Johan, and Claes Johnson. "Resolution of d'Alembert's paradox." Journal of mathematical fluid mechanics 12.3 (2010): 321–334.

[12] de Kármán, Théodore. "Accelerated flow of an incompressible fluid with wake formation." Annali di Matematica Pura ed Applicata 29 (1949): 247–249.

[13] Jona E. "Limitazioni necessarie alle prove degli isolamenti ad alte tensioni alternative", in Atti dell'Associazione elettrotecnica italiana, VII (1904): 195–220

[14] Jona, E. "Insulating Materials in High Tension Cables." Transactions, International Electrical Congress. Vol. 2. 1904.

[15] Marchioro, Carlo, and Mario Pulvirenti. Mathematical theory of incompressible non viscous fluids. Vol. 96. Springer Science & Business Media, 2012.

[16] Masotti A. "Decomposizione intrinseca del vortice a sue applicazioni", Istituto Lombardo di Scienze a Lettere Rendiconti (2) 60 (1927) 869–874.

[17] Mattei, Giulio. "Sulla formulazione intrinseca delle equazioni della magnetofluidodinamica." Bollettino dell'Unione Matematica Italiana 20.4 (1965): 458–470.

[18] Nastasi, Pietro, and Rossana Tazzioli. "Toward a scientific and personal biography of Tullio Levi-Civita (1873–1941)." Historia Mathematica 32.2 (2005): 203-236.

[19] Nastasi, Pietro, and Rossana Tazzioli. "Problems of method in Levi-Civita's contributions to hydrodynamics." Revue d'histoire des mathématiques 12.1 (2006): 117-154.

[20] Lagrée, Pierre-Yves. "Boundary layer separation and asymptotics from 1904 to 1969." Comptes Rendus Mécanique 345.9 (2017): 613–619.

[21] Levi, Decio. "Levi-Civita theory for irrotational water waves in a one-dimensional channel and the complex Korteweg-de Vries equation." Theoretical and Mathematical Physics 99 (1994): 705-709.

[22] Levi-Civita, T. "Sulla resistenza dei mezzi fluidi." Rend. R. Accad. Naz. Lincei (5) 10 (1901): 3–9.

[23] Levi-Civita, T. "Sopra un problema di elettrostatica, che interessa la costruzione dei cavi." Il Nuovo Cimento (1901-1910) 8 (1904): 187–195.

[24] Levi-Civita, Tullio. "Sopra un problema di elettrostatica che si è presentato nella costruzione dei cavi." Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) 20.1 (1905): 173–228.

[25] Levi-Civita, T. "Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi'." Atti R. Ist. Veneto Scienze, Lettere ed Arti 65 (1906): 1149.

[26] Levi-Civita, T. "Scie e leggi di resistenza." Rend. Circ. Matem. Palermo 23 (1907): 1–37.

[27] Levi-Civita, T. "Sulle onde progressive di tipo permanente." Rend. Fís. Acc. Lincei 16 (1907): 777–790.

[28] Levi-Civita, Tullio. "Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie." Mathematische Annalen 93 (1925): 264–314.

[29] Levi-Civita, Tullio, and Ugo Amaldi. "Nozioni di balistica esterna". Secondo il programma stabilito dalla Commissione supr. di difesa. Zanichelli, 1935.

[30] Palumbo, D. "Some considerations on closed configurations of magnetohydrostatic equilibrium." Il Nuovo Cimento B (1965-1970) 53 (1968): 507–511.

[31] Prandtl L. "Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics. Part 1: Fundamental Concepts and the Most Important Theorems. Part 2: Applications" (1979) Technical Report NACA-TR-116

[32] Ricca, Renzo L. "The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics." Fluid Dynamics Research 18.5 (1996): 245–268.

[33] Serrin, James B. "Existence theorems for some hydrodynamical free boundary problems." Journal of Rational Mechanics and Analysis 1 (1952): 1–48.

[34] Schlichting, H. et al. Boundary Layer Theory McGraw-Hill, 1955.

[35] Somigliana, Carlo. "Tullio Levi-Civita e Vito Volterra." Milan Journal of Mathematics 17 (1946): 1–15.

[36] Stewartson, Keith. "D'Alembert's paradox." SIAM review 23.3 (1981): 308-343.

[37] Stoker, James Johnston. Water waves: The mathematical theory with applications. Vol. 36. John Wiley & Sons, 2011.

[38] Tazzioli, Rossana. "The Eyes of French Mathematicians on Tullio Levi-Civita: the Case of Hydrodynamics (1900–1930)." Images of Italian Mathematics in France. Springer International Publishing, 2016. 255-288.

[39] Tazzioli, Rossana. "D'Alembert's paradox, 1900–1914: Levi-Civita and his Italian and French followers." Comptes Rendus Mécanique (2017): 488–497.

[40] Truesdell, C. "Zusammenfassender Bericht. Intrinsic Equations of Spatial Gas Flow." ZAMM–Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 40.1?3 (1960): 9–14.

[41] Villat, Henri. "Sur la résistance des fluides." Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. Vol. 28. Elsevier, 1911.

[42] Wehausen, J. V., and E. V. Laitone "Surface waves" (Handbuch der Physik, Vol. 9, Springer-Verlag, 1960, pp. 446–778.